შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

03.05.2014/ მათ/III/ M310

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

თუ $(a_1;a_2\dots a_n)$ სამეულისთვის სრულდება, რომ ჩვენთვის $(ka_1;ka_2;\dots ka_n)$ ცხადია ისიც უტოლობის ყველა ერთგვაროვანია, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_1+a_2+\dots+a_n=1$.

ინდუქციით, ~~რომ~~ რომ გვაქვს:

$$S(n)\equiv\frac{a_1^3}{a_1^2+a_2a_3}+\dots+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2}\geq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}$$

$$S(n+1)=S(n)-\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2+a_na_1}-\frac{a_n^3}{a_n^2+a_1a_2}+\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2+a_na_{n+1}}+\frac{a_n^3}{a_n^2+a_{n+1}a_1}+\frac{a_{n+1}^3}{a_{n+1}^2+a_1a_2}=$$

$$=S(n)+\frac{a_{n-1}^3\cdot a_n(a_{n+1}-a_1)}{(a_{n-1}^2+a_na_1)(a_{n-1}^2+a_na_{n+1})}+\frac{a_n^3a_1(a_{n+1}-a_2)}{(a_n^2+a_1a_2)(a_n^2+a_{n+1}a_1)}+\frac{a_{n+1}^3}{a_{n+1}^2+a_1a_2}$$

a_{n+1} შეგვიძლია ავიღოთ 1-ის, რადგან ყველა სხვა გვაქვს a_{n+1}-ზე

ე.ი.ნ ტოლობის მივიღოთ სიმეტრიული ვაჩვენოთ, რომ.

$$\frac{a_{n-1}^3\cdot a_n(1-a_1)}{(a_{n-1}^2+a_na_1)(a_{n-1}^2+a_n)}+\frac{a_n^3\cdot a_1(1-a_2)}{(a_n^2+a_1a_2)(a_n^2+a_1)}+\frac{1}{1+a_1a_2}\geq\frac{1}{2},$$ რადგან

$S(n)$ უკვე $\geq\frac{a_1+\dots+a_n}{2}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

03.05.2014/ მათ/III/ M310

ამოცანა № 2

გვერდი № 1.

ლ1. თუ მოცემული $\triangle ABC$ და I არის ჩახაზული წრეწირის ცენტრი ხოლო ω შემოხაზული წრეწირი. თუ $AI \cap \omega = T \Rightarrow BT=CT=TI$

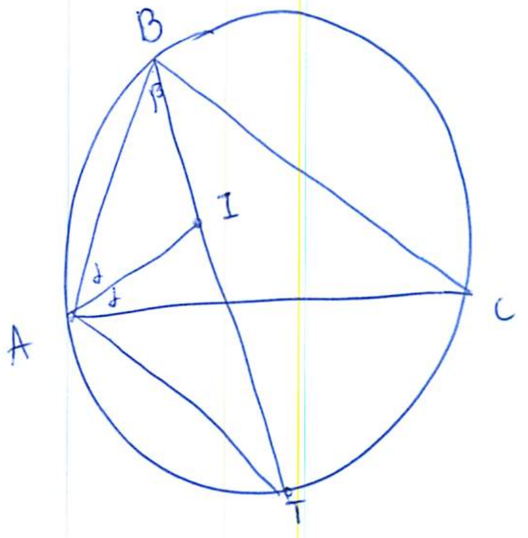
$\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow \angle IAC = \alpha$

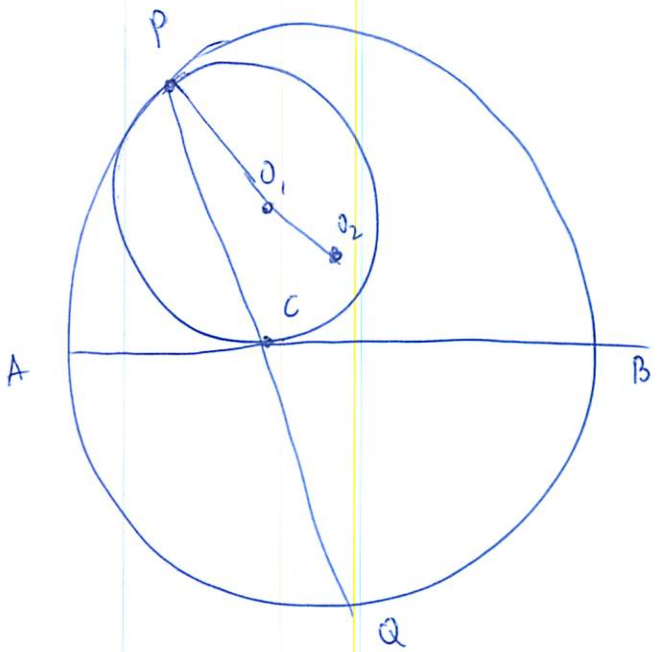
$\angle ABC = 2\beta \Rightarrow \angle ABI = \beta \Rightarrow \angle AIT = \alpha+\beta$

$\angle CAT = \beta \Rightarrow \angle IAT = \alpha+\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow IT = TA$ და ასევე $TA = TC \Rightarrow$

$\Rightarrow IT = TA = TC.$





ახლა ვაჩვენოთ, რომ Q არის $\breve{AB}$-ის შუაწერტილი

O_1 და O_2 იქნებიან შესაბამისად პატარა და დიდი წრეწირების ცენტრები $\Rightarrow P;\ O_1;\ O_2$ არიან ერთ წრფეზე

$\angle CPO_1 = \angle O_1CP = \angle O_2QP \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2Q \parallel O_1C$ რადგან $O_1C \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2Q \perp AB \Rightarrow Q$ არის

$\breve{AB}$-ის შუაწერტილი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

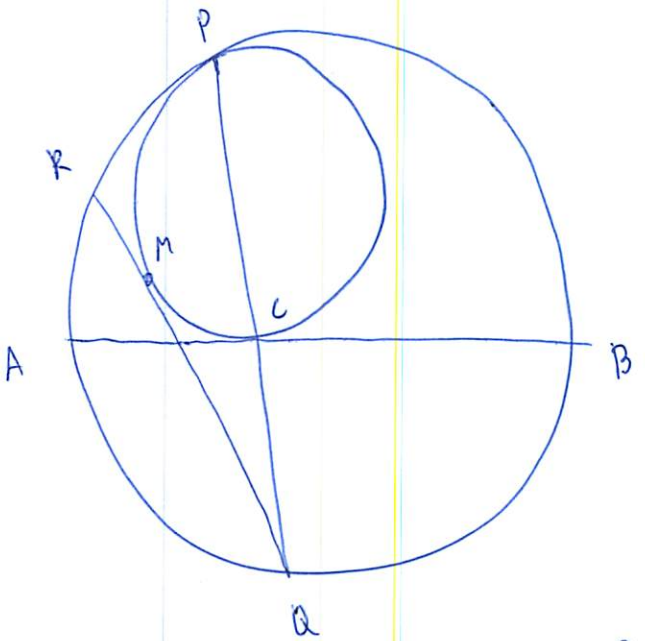
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14.

03.05.2014/ მათ/III/ M310

ამოცანა № 2

გვერდი № 2



დავუშვათ QR კვეთს ω-ს M-ში. $\angle PAQ = \angle APQ \Rightarrow AQ$ ეხება ΔAPC-ზე შემოხაზულ წრეწირს $\Rightarrow AQ^2 = QC \cdot QP = QM^2 = QM = AQ = QB$ ვთქვათ $X \in RQ$, [illegible]

Q არის $\overset{\frown}{AB}$-ს შუაწერტილი და $XQ = AQ = QB \Rightarrow M = X$, ანალოგიურად [illegible]

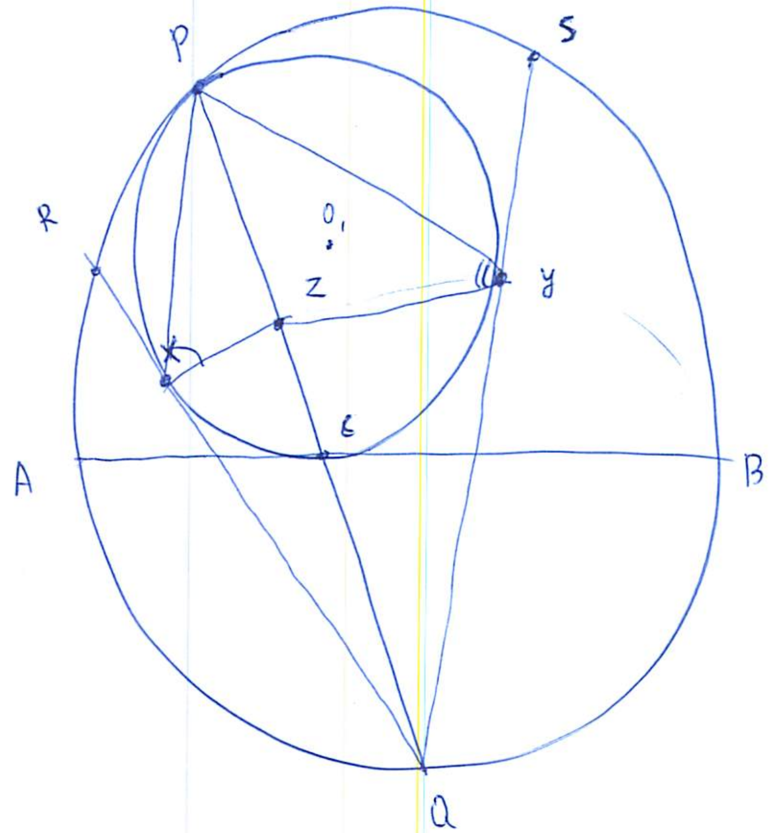
[illegible] [illegible] [illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14	03.05.2014/ მათ/III/ M310
ამოცანა № 2	გვერდი № 3



$PX \cap \Omega = M$
$SY \cap \Omega = N.$

$\angle ZXB = \angle ZAB = \frac{\breve{ZB}}{2}$
$\angle RXB = 90 + \frac{\angle RAB}{2}$

$\angle AXB = \angle AYB = \angle AZB = 90 + \frac{\angle ARB}{2} = 90 + \frac{\angle APB}{2} = 90 + \frac{\angle ASB}{2} = 90 + \frac{\breve{AB}}{2}. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $AXZYB$ არიან ერთ წრეწირზე.

$\angle PXZ = \angle RXZ - \angle RXP = \angle RXB - \angle ZXB - \angle RXP = 90 + \frac{\angle RAB}{2} - \angle ZAB - \angle RXP =$

$= 90 + \frac{\angle RAB}{2} - \frac{\breve{PB}}{2} - \angle RXP = 90 + \frac{\breve{RB} - \breve{PB}}{2} - \angle RXP =$

$= 90 + \frac{\breve{RP}}{2} - \angle RXP = 90 + \frac{\breve{RP}}{2} - \left(\frac{\breve{RP}}{2} + \frac{\breve{MQ}}{2}\right) = 90 - \frac{\breve{MQ}}{2}.$

ანალოგიურად $\angle PYZ = 90 - \frac{\breve{NQ}}{2}$ $\Rightarrow$ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $90 - \frac{\breve{MQ}}{2} + \frac{90 - \breve{NQ}}{2} = 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\breve{MQ}}{2} + \frac{\breve{NQ}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \frac{\breve{MN}}{2} = 90^\circ \Rightarrow$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

03.05.2014/ მათ/III/ M310

ამოცანა № 2

გვერდი № 4

∠XPY უნდა გამოვიდეს 90°, რაც შეუძლებელია რადგან X და Y გადიოდნენ დიამეტრალურ წერტილებში და X-ზე და Y-ზე გავლებული მხებში ვერ გადაიკვეთებიან Q-ში. =>

=> ამოცანა არ არის სწორად შედგენილი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 55-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 14

03.05.2014/ მათ/III/ M310

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

სულ დაწყვილებული წყვილითა რაოდენობა არის $C_{2000}^{2} = 1999000$, საიდან ნებისმიერი 2 წყვილი, რომ ავირჩიოთ სადაც ყველა რიცხვი განსხვავებული ე ორი რიცხვი დალაგებულ ზრდადობით.

~~განვიხილოთ~~ დავალაგოთ ეს რიცხვები ზრდადობით:

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2000}$

განვიხილოთ ყველა შესაძლო სხვაობა და ავირჩიოთ მათგან მინიმუმი $a_i - a_j = \varepsilon_1$. მაშინ ცხადია $\forall i \neq j$-სთვის $1 \le j < i \le 2000$ $a_i - a_j \ge (i-j)\cdot\varepsilon_1$.

$\frac{\varepsilon_1}{c-d} - 1 \le 0 \Rightarrow \left|\frac{\varepsilon_1}{c-d} - 1\right| = 1 - \frac{\varepsilon_1}{c-d}$ დავუშვათ საწინააღმდეგო

და ყველასთვის $\ge \frac{1}{10^5} \Rightarrow 1-\frac{\varepsilon_1}{c-d} = 1-\frac{\varepsilon_1}{a_k-a_t} \ge 1-\frac{\varepsilon_1}{(k-t)\cdot\varepsilon_1} = 1-\frac{1}{k-t} \ge 1-\frac{1}{1999} \Rightarrow$

საიდან ავირჩიეთ ~~a_{1999}~~ a_{2000} და a_1-ს ცხადია ~~$\varepsilon_1 \neq a_{1999}-a_1$, საიდან~~ $\varepsilon_1 \neq a_{2000}-a_1$

$\Rightarrow \frac{1}{1999} \ge \frac{\varepsilon_1}{\cancel{c-d}\ a_{2000}-a_1}$ $\quad \varepsilon_1 \le \frac{a_i-a_j}{i-j}$

ε_2 იყოს მაქსიმალური სხვაობა $\Rightarrow \varepsilon_2 \ge \frac{a_i-a_j}{i-j}$

$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ $\quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$